EJERCICIO 1 (31:16)

1.1 Dados los cuadrimomentos iniciales $p_a^\mu = \begin{pmatrix} E_a \\ p_a \end{pmatrix}$ y $p_b^\mu = \begin{pmatrix} E_b \\ p_b \end{pmatrix}$, demostrar que la velocidad del observador para un sistema de referencia COM (centro de momentos) debe ser

$$\boldsymbol{V = \frac{p_a + p_b}{E_a + E_b}}$$

1.2 Encontrar los cuadrimomentos desde el sistema de referencia COM

1.3 Calcular la energía del centro de momentos

Ejercicio 1.1

La transformación de Lorentz para un sistema de referencia moviéndose a velocidad V es $\Lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$

Considerando c = 1 entonces $\beta = V$ y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}$

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \begin{pmatrix} 1 & -V \\ -V & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_a^{\mu\,COM} = \Lambda\, p_a^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \begin{pmatrix} 1 & -V \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_a \\ p_a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \begin{pmatrix} E_a - Vp_a \\ -VE_a + p_a \end{pmatrix}$$

$$p_b^{\mu\,COM} = \Lambda\, p_b^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \begin{pmatrix} 1 & -V \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_b \\ p_b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \begin{pmatrix} E_b - Vp_b \\ -VE_b + p_b \end{pmatrix}$$

En el sistema de referencia COM debe cumplirse que $\sum_i \overrightarrow{p_i} = 0$, es decir que $\overrightarrow{p_a^{COM}} + \overrightarrow{p_b^{COM}} = 0$, de modo que:

$$\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(-VE_a + p_a) + \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(-VE_b + p_b) = 0$$

$$-VE_a + p_a - VE_b + p_b = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{V = \frac{p_a + p_b}{E_a + E_b}}}$$

Ejercicio 1.2

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{p_a + p_b}{E_a + E_b}\right)^2}} = \frac{E_a + E_b}{\sqrt{(E_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2}}$$

$$\beta = V = \frac{p_a + p_b}{E_a + E_b}$$

$$\Lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} = \frac{E_a + E_b}{\sqrt{(E_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{p_a + p_b}{E_a + E_b} \\ -\frac{p_a + p_b}{E_a + E_b} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{(E_a+E_b)^2-(p_a+p_b)^2}}\begin{pmatrix} E_a+E_b & -(p_a+p_b) \\ -(p_a+p_b) & E_a+E_b \end{pmatrix}$$

$$p_a^{\mu\,COM} = \Lambda\, p_a^\mu = \frac{1}{\sqrt{(E_a+E_b)^2-(p_a+p_b)^2}}\begin{pmatrix} E_a+E_b & -(p_a+p_b) \\ -(p_a+p_b) & E_a+E_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_a \\ p_a \end{pmatrix}$$

$$p_a^{\mu\,COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_a+E_b)^2-(p_a+p_b)^2}}\begin{pmatrix} (E_a+E_b)E_a-(p_a+p_b)p_a \\ -(p_a+p_b)E_a+(E_a+E_b)p_a \end{pmatrix}$$

$$p_a^{\mu\,COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_a+E_b)^2-(p_a+p_b)^2}}\begin{pmatrix} E_a^2+E_bE_a-p_a^2-p_bp_a \\ -p_aE_a-p_bE_a+E_ap_a+E_bp_a \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{p_a^{\mu\,COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_a+E_b)^2-(p_a+p_b)^2}}\begin{pmatrix} E_a^2+E_bE_a-p_a^2-p_bp_a \\ -p_bE_a+E_bp_a \end{pmatrix}}}$$

$$p_b^{\mu\,COM} = \Lambda\, p_b^\mu = \frac{1}{\sqrt{(E_a+E_b)^2-(p_a+p_b)^2}}\begin{pmatrix} E_a+E_b & -p_a+p_b \\ -p_a+p_b & E_a+E_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_b \\ p_b \end{pmatrix}$$

$$p_b^{\mu\,COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_a+E_b)^2-(p_a+p_b)^2}}\begin{pmatrix} (E_a+E_b)E_b-(p_a+p_b)p_b \\ -(p_a+p_b)E_b+(E_a+E_b)p_b \end{pmatrix}$$

$$p_b^{\mu\,COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_a+E_b)^2-(p_a+p_b)^2}}\begin{pmatrix} E_b^2+E_bE_a-p_bp_a-p_b^2 \\ -p_aE_b-p_bE_b+E_ap_b+E_bp_b \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{p_b^{\mu\,COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_a+E_b)^2-(p_a+p_b)^2}}\begin{pmatrix} E_b^2+E_bE_a-p_b^2-p_bp_a \\ -p_aE_b+E_ap_b \end{pmatrix}}}$$

<u>Ejercicio 1.3</u>

La energía del centro de momentos es

$$E^{COM} = E_a^{COM} + E_b^{COM}$$

$$E^{COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_a+E_b)^2-(p_a+p_b)^2}}\left(E_a^2+E_bE_a-p_a^2-p_bp_a\right) + \frac{1}{\sqrt{(E_a+E_b)^2-(p_a+p_b)^2}}\left(E_b^2+E_bE_a-p_bp_a-p_b^2\right)$$

$$E^{COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_a+E_b)^2-(p_a+p_b)^2}}\left(E_a^2+E_bE_a-p_a^2-p_bp_a+E_b^2+E_bE_a-p_bp_a-p_b^2\right)$$

$$E^{COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2}} \left(E_a^2 + 2E_bE_a + E_b^2 - p_a^2 - 2p_bp_a - p_b^2\right)$$

$$E^{COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2}} \left((E_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{E^{COM} = \sqrt{(E_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2}}}$$

EJERCICIO 2 (36:56)

2.1 Para un sistema de referencia LAB demostrar que, si la partícula "b" está en reposo, la velocidad del observador debe ser

$$\boldsymbol{V = \frac{p_b}{E_b}}$$

2.2 Encontrar los cuadrimomentos desde el sistema de referencia LAB

2.3 Si estoy en un sistema de referencia LAB (velocidad de partícula "b" igual a cero) ¿cuál es la transformación de Lorentz que nos lleva al centro de momentos?

Ejercicio 2.1

$$p_b^{\mu\, LAB} = \Lambda\, p_b^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\begin{pmatrix} 1 & -V \\ -V & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_b \\ p_b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\begin{pmatrix} E_b - Vp_b \\ -VE_b + p_b \end{pmatrix}$$

En el sistema de referencia LAB el momento de la partícula "b" debe ser nulo, por lo que

$$-VE_b + p_b = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{V = \frac{p_b}{E_b}}}$$

Ejercicio 2.2

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\begin{pmatrix} 1 & -V \\ -V & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{p_b}{E_b}\right)^2}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{p_b}{E_b} \\ -\frac{p_b}{E_b} & 1 \end{pmatrix} = \frac{E_b}{\sqrt{{E_b}^2 - {p_b}^2}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{p_b}{E_b} \\ -\frac{p_b}{E_b} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{{E_b}^2 - {p_b}^2}}\begin{pmatrix} E_b & -p_b \\ -p_b & E_b \end{pmatrix}$$

$$p_a^{\mu\, LAB} = \Lambda\, p_a^\mu = \frac{1}{\sqrt{{E_b}^2 - {p_b}^2}}\begin{pmatrix} E_b & -p_b \\ -p_b & E_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_a \\ p_a \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{p_a^{\mu\, LAB} = \frac{1}{\sqrt{{E_b}^2 - {p_b}^2}}\begin{pmatrix} E_aE_b - p_bp_a \\ -p_bE_a + E_bp_a \end{pmatrix}}}$$

$$p_b^{\mu\, LAB} = \Lambda\, p_b^\mu = \frac{1}{\sqrt{{E_b}^2 - {p_b}^2}}\begin{pmatrix} E_b & -p_b \\ -p_b & E_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_b \\ p_b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{{E_b}^2 - {p_b}^2}}\begin{pmatrix} {E_b}^2 - {p_b}^2 \\ -p_bE_b + E_bp_b \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{p_b^{\mu\, LAB} = \begin{pmatrix} \sqrt{{E_b}^2 - {p_b}^2} \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Ejercicio 2.3

En el ejercicio 1.2 calculamos la transformada de Lorentz para pasar a un sistema de referencia COM

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{(E_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2}} \begin{pmatrix} E_a + E_b & -(p_a + p_b) \\ -(p_a + p_b) & E_a + E_b \end{pmatrix}$$

En el sistema LAB p_b es nulo por lo que transformada resulta:

$$\boxed{\boldsymbol{\Lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(E_a{}^{LAB} + E_b{}^{LAB}\right)^2 - p_a{}^{LAB^2}}} \begin{pmatrix} E_a{}^{LAB} + E_b{}^{LAB} & -p_a{}^{LAB} \\ -p_a{}^{LAB} & E_a{}^{LAB} + E_b{}^{LAB} \end{pmatrix}}}$$

EJERCICIO 3 (38:27)

Siendo s, t y m las variables de Mandelstam, demostrar que:

$$\boldsymbol{s+t+m = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2}$$

Donde

$\boldsymbol{s = (p_a + p_b)^2}$

$\boldsymbol{t = (p_a - p_c)^2}$

$\boldsymbol{u = (p_a - p_d)^2}$

$s = (p_a + p_b)^2 = {p_a}^2 + 2p_a p_b + {p_b}^2$

$t = (p_a - p_c)^2 = {p_a}^2 - 2p_a p_c + {p_c}^2$

$u = (p_a - p_d)^2 = {p_a}^2 - 2p_a p_d + {p_d}^2$

$s + t + m = {p_a}^2 + 2p_a p_b + {p_b}^2 + {p_a}^2 - 2p_a p_c + {p_c}^2 + {p_a}^2 - 2p_a p_d + {p_d}^2$

Considerando que ${p_i}^2 = {m_i}^2$

$s + t + m = {m_a}^2 + 2p_a p_b + {m_b}^2 + {p_a}^2 - 2p_a p_c + {m_c}^2 + {p_a}^2 - 2p_a p_d + {m_d}^2$

$s + t + m = {m_a}^2 + {m_b}^2 + {m_c}^2 + {m_d}^2 + 2p_a p_b + 2{p_a}^2 - 2p_a p_c - 2p_a p_d$

$s + t + m = {m_a}^2 + {m_b}^2 + {m_c}^2 + {m_d}^2 + 2p_a(p_b + p_a - p_c - p_d)$

Como $p_a + p_b = p_d + p_d$

$s + t + m = {m_a}^2 + {m_b}^2 + {m_c}^2 + {m_d}^2 + 2p_a(0)$

$\boxed{\boldsymbol{s + t + m = {m_a}^2 + {m_b}^2 + {m_c}^2 + {m_d}^2}}$